



Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1:

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, **ungerade**  $\rightarrow 3 \cdot 1 + 1 = 4$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, gerade  $\rightarrow \frac{4}{2} = 2$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2,



Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, gerade  $\rightarrow \frac{2}{2} = 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1 → die 1 hatten wir schon!

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, **ungerade**  $\rightarrow 3 \cdot 3 + 1 = 10$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, gerade  $\rightarrow \frac{10}{2} = 5$



Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, **ungerade**  $\rightarrow 3 \cdot 5 + 1 = 16$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, gerade  $\rightarrow \frac{16}{2} = 8$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8,

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, gerade  $\rightarrow \frac{8}{2} = 4$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4 → die 4 hatten wir oben schon!

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...



Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

*Mathematischer formuliert:*

Für natürliche Zahlen  $n$  betrachten wir die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3n + 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 3 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Beispiele:

- Startzahl 1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
- Startzahl 7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

*Mathematischer formuliert:*

Für natürliche Zahlen  $n$  betrachten wir die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3n + 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und bilden damit den *Orbit der Zahl*  $n$ , d.h. die Zahlenfolge  $n, f(n), f(f(n)), \dots$

Wir stellen fest:

- Wenn wir in einem Orbit die Zahl 1 erreichen, setzt sich dieser Orbit mit der Periode 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... unendlich fort.

Wir stellen fest:

- Wenn wir in einem Orbit die Zahl 1 erreichen, setzt sich dieser Orbit mit der Periode 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... unendlich fort.
- Wenn wir bei der Berechnung des Orbits einer Zahl  $n$  auf eine andere Zahl  $m$  stoßen, deren Orbit wir schon bestimmt haben, kennen wir auch den restlichen Orbit von  $n$ .

Wir stellen fest:

- Wenn wir in einem Orbit die Zahl 1 erreichen, setzt sich dieser Orbit mit der Periode 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... unendlich fort.
- Wenn wir bei der Berechnung des Orbits einer Zahl  $n$  auf eine andere Zahl  $m$  stoßen, deren Orbit wir schon bestimmt haben, kennen wir auch den restlichen Orbit von  $n$ .

Beispiel: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Wir stellen fest:

- Wenn wir in einem Orbit die Zahl 1 erreichen, setzt sich dieser Orbit mit der Periode 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... unendlich fort.
- Wenn wir bei der Berechnung des Orbits einer Zahl  $n$  auf eine andere Zahl  $m$  stoßen, deren Orbit wir schon bestimmt haben, kennen wir auch den restlichen Orbit von  $n$ .

Beispiel: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

## *Die Collatz-Vermutung*

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode 4, 2, 1, ...



Wir stellen fest:

- Wenn wir in einem Orbit die Zahl 1 erreichen, setzt sich dieser Orbit mit der Periode 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... unendlich fort.
- Wenn wir bei der Berechnung des Orbits einer Zahl  $n$  auf eine andere Zahl  $m$  stoßen, deren Orbit wir schon bestimmt haben, kennen wir auch den restlichen Orbit von  $n$ .

Beispiel: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

## *Die Collatz-Vermutung*

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode 4, 2, 1, ...

Diese Vermutung wurde Mitte des 20. Jahrhunderts formuliert und konnte bisher weder bewiesen noch widerlegt werden!

- 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

- 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

- 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

- 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Das sieht soweit ganz gut aus für die Richtigkeit der Collatz-Vermutung.

- 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...
- 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Das sieht soweit ganz gut aus für die Richtigkeit der Collatz-Vermutung.

Aber mit Ausprobieren kann sie nicht bewiesen werden, denn ein schon einziges Gegenbeispiel würde reichen, um sie zu widerlegen.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.



Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

## *Behauptung*

In Fall (2) ist der Orbit unbeschränkt, d.h. er enthält beliebig große Zahlen.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

## *Behauptung*

In Fall (2) ist der Orbit unbeschränkt, d.h. er enthält beliebig große Zahlen.

## *Begründung:*

Wenn eine Zahl in einem Orbit zweimal auftaucht, dann ist der Orbit periodisch.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

## *Behauptung*

In Fall (2) ist der Orbit unbeschränkt, d.h. er enthält beliebig große Zahlen.

## *Begründung:*

Wenn eine Zahl in einem Orbit zweimal auftaucht, dann ist der Orbit periodisch. Also ist jeder Orbit, in dem nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen, periodisch.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

## *Behauptung*

In Fall (2) ist der Orbit unbeschränkt, d.h. er enthält beliebig große Zahlen.

## *Begründung:*

Wenn eine Zahl in einem Orbit zweimal auftaucht, dann ist der Orbit periodisch. Also ist jeder Orbit, in dem nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen, periodisch. Ein nicht-periodischer Orbit muss daher **unendlich viele verschiedene Zahlen** enthalten.

Damit der Orbit einer Zahl nicht die Periode  $4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$  erreicht, müsste einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) Der Orbit erreicht eine andere Periode.
- (2) Der Orbit ist nicht periodisch.

## *Behauptung*

In Fall (2) ist der Orbit unbeschränkt, d.h. er enthält beliebig große Zahlen.

## *Begründung:*

Wenn eine Zahl in einem Orbit zweimal auftaucht, dann ist der Orbit periodisch. Also ist jeder Orbit, in dem nur endlich viele verschiedene Zahlen vorkommen, periodisch. Ein nicht-periodischer Orbit muss daher **unendlich viele verschiedene Zahlen** enthalten. Dann kann es in diesem Orbit aber **keine größte Zahl** geben. □

**Idee 1: Weiter ausprobieren!**

**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist



**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist, also bis:

295.000.000.000.000.000.000

**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist, also bis:

295.000.000.000.000.000.000

Aber das ist kein allgemeiner Beweis für die Collatz-Vermutung.

**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist, also bis:

295.000.000.000.000.000.000

Aber das ist kein allgemeiner Beweis für die Collatz-Vermutung.

**Idee 2: Rückwärts rechnen!** Statt alle natürlichen Zahlen der Reihe nach durchzuprobieren, können wir überlegen, von welchen Zahlen wir wissen, dass wir die Periode 1, 4, 2, ... erreichen.

**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist, also bis:

295.000.000.000.000.000.000

Aber das ist kein allgemeiner Beweis für die Collatz-Vermutung.

**Idee 2: Rückwärts rechnen!** Statt alle natürlichen Zahlen der Reihe nach durchzuprobieren, können wir überlegen, von welchen Zahlen wir wissen, dass wir die Periode  $1, 4, 2, \dots$  erreichen. Das ist z.B. für alle Zweierpotenzen klar:

$$16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

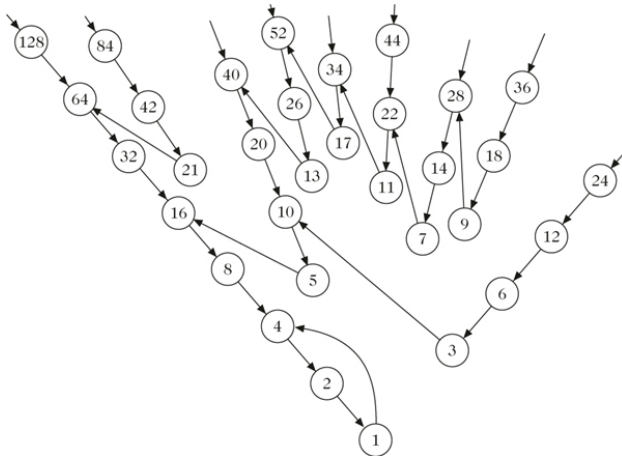
**Idee 1: Weiter ausprobieren!** Mit Computern wurde inzwischen nachgerechnet, dass die Vermutung für alle Startwerte bis  $2,95 \cdot 10^{20}$  wahr ist, also bis:

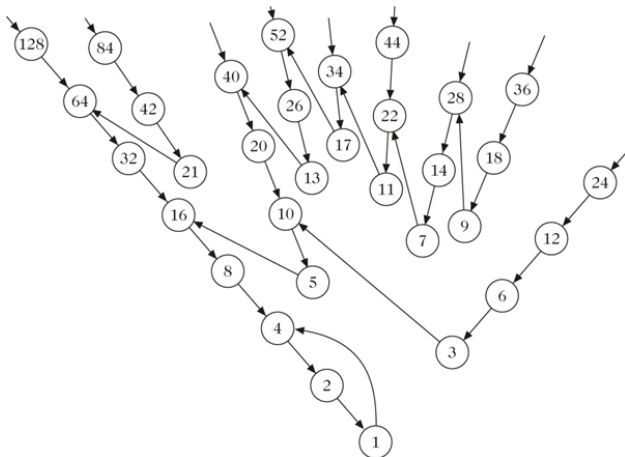
295.000.000.000.000.000.000

Aber das ist kein allgemeiner Beweis für die Collatz-Vermutung.

**Idee 2: Rückwärts rechnen!** Statt alle natürlichen Zahlen der Reihe nach durchzuprobieren, können wir überlegen, von welchen Zahlen wir wissen, dass wir die Periode  $1, 4, 2, \dots$  erreichen. Das ist z.B. für alle Zweierpotenzen klar:

$\dots \rightarrow 1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$





## *Alternative Formulierung der Collatz-Vermutung*

Der Collatz-Graph ist **zusammenhängend**, d.h. jede natürliche Zahl ist durch Pfeile mit der 1 verbunden.

Der deutsche Mathematiker Lothar Collatz (1910-1990, an der UHH 1952-1990) entdeckte dieses Problem als erster, seitdem haben sich zahlreiche namhafte Mathematiker daran die Zähne ausgebissen.



Der deutsche Mathematiker Lothar Collatz (1910-1990, an der UHH 1952-1990) entdeckte dieses Problem als erster, seitdem haben sich zahlreiche namhafte Mathematiker daran die Zähne ausgebissen.

Es sind Preisgelder für einen Beweis oder eine Widerlegung der Collatz-Vermutung ausgesetzt – reich werdet Ihr damit allerdings nicht.

Der deutsche Mathematiker Lothar Collatz (1910-1990, an der UHH 1952-1990) entdeckte dieses Problem als erster, seitdem haben sich zahlreiche namhafte Mathematiker daran die Zähne ausgebissen.

Es sind Preisgelder für einen Beweis oder eine Widerlegung der Collatz-Vermutung ausgesetzt – reich werdet Ihr damit allerdings nicht.

Paul Erdős: „*Die Mathematik ist für solche Probleme noch nicht bereit.*“

## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode  $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$

## 1. Variante: $n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

Weitere Beispiele:

- 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, ...

## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode  $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$

Weitere Beispiele:

- $11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, \dots$
- $19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, \dots$
- $27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \dots$

*Die Collatz-Vermutung mit  $n + 1$* 

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode  $2, 1, 2, 1, \dots$

## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

Weitere Beispiele:

- 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, ...

*Die Collatz-Vermutung mit  $n + 1$* 

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode 2, 1, 2, 1, ...

Wir starten mit einer geraden Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $\frac{n}{2}$ , also kleiner als  $n$ .

## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

Weitere Beispiele:

- 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, ...

*Die Collatz-Vermutung mit  $n + 1$* 

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode 2, 1, 2, 1, ...

Wir starten mit einer geraden Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $\frac{n}{2}$ , also kleiner als  $n$ . Starten wir stattdessen mit einer ungeraden Zahl  $n$ , so ist die nächste Zahl  $n + 1$ , also gerade. Die übernächste Zahl ist dann  $\frac{n+1}{2}$ , also ebenfalls kleiner als  $n$ .



## Dann eben einfachere (?) Probleme

1. Variante:  $n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, addieren wir 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Hier gibt es die kürzere Periode 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...

Weitere Beispiele:

- 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 19, 20, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1, 2, 1, ...
- 27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1, 2, 1, ...

*Die Collatz-Vermutung mit  $n + 1$* 

Der Orbit jeder natürlichen Zahl erreicht irgendwann die Periode 2, 1, 2, 1, ...

Wir starten mit einer geraden Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $\frac{n}{2}$ , also kleiner als  $n$ . Starten wir stattdessen mit einer ungeraden Zahl  $n$ , so ist die nächste Zahl  $n + 1$ , also gerade. Die übernächste Zahl ist dann  $\frac{n+1}{2}$ , also ebenfalls kleiner als  $n$ .

Das bedeutet, dass die Zahlen in jedem Orbit letztlich immer kleiner werden und daher irgendwann die 1 erreichen. □

## Dann eben einfachere (?) Probleme

2. Variante:  $2n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

## Dann eben einfachere (?) Probleme

### 2. Variante: $2n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...

## Dann eben einfachere (?) Probleme

### 2. Variante: $2n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...

## Dann eben einfachere (?) Probleme

2. Variante:  $2n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

## Dann eben einfachere (?) Probleme

### 2. Variante: $2n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

Hier scheint es keine Periode zu geben!?

## Dann eben einfachere (?) Probleme

### 2. Variante: $2n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

Hier scheint es keine Periode zu geben!?

### *Behauptung*

Jeder Orbit mit ungerader Startzahl ist unbeschränkt.

## Dann eben einfachere (?) Probleme

### 2. Variante: $2n + 1$ statt $3n + 1$

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

Hier scheint es keine Periode zu geben!?

### *Behauptung*

Jeder Orbit mit ungerader Startzahl ist unbeschränkt.

*Begründung:* Wir nehmen eine ungerade Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $2n + 1$ , also auch ungerade, und insbesondere größer als  $n$ .



## Dann eben einfachere (?) Probleme

2. Variante:  $2n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

Hier scheint es keine Periode zu geben!?

*Behauptung*

Jeder Orbit mit ungerader Startzahl ist unbeschränkt.

*Begründung:* Wir nehmen eine ungerade Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $2n + 1$ , also auch ungerade, und insbesondere größer als  $n$ . Mit derselben Argumentation ist auch die übernächste Zahl ungerade und noch größer.

## Dann eben einfachere (?) Probleme

2. Variante:  $2n + 1$  statt  $3n + 1$ 

Wir nehmen eine natürliche Zahl. Wenn sie gerade ist, teilen wir sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, multiplizieren wir sie mit 2 und addieren 1. Das wiederholen wir immer wieder.

Einige Beispiele:

- 1, 3, 7, 15, 31, ...
- 40, 20, 10, 5, 11, 23, 47, 95, ...
- 72, 36, 18, 9, 19, 39, 79, 159, ...

Hier scheint es keine Periode zu geben!?

*Behauptung*

Jeder Orbit mit ungerader Startzahl ist unbeschränkt.

*Begründung:* Wir nehmen eine ungerade Zahl  $n$ . Dann ist die nächste Zahl im Orbit  $2n + 1$ , also auch ungerade, und insbesondere größer als  $n$ . Mit derselben Argumentation ist auch die übernächste Zahl ungerade und noch größer. Also wachsen die Zahlen im Orbit jeder ungeraden Zahl unbeschränkt.  $\square$

- Die Collatz-Vermutung ist leicht zu formulieren, aber offenbar extrem schwierig zu beweisen oder zu widerlegen.

- Die Collatz-Vermutung ist leicht zu formulieren, aber offenbar extrem schwierig zu beweisen oder zu widerlegen.
- Das gilt nicht für auf den ersten Blick sehr ähnliche Fragestellungen:
  - $n + 1$  statt  $3n + 1$ : Alle Orbits sind periodisch!
  - $2n + 1$  statt  $3n + 1$ : Es gibt (sogar unendlich viele) unbeschränkte Orbits!

- Die Collatz-Vermutung ist leicht zu formulieren, aber offenbar extrem schwierig zu beweisen oder zu widerlegen.
- Das gilt nicht für auf den ersten Blick sehr ähnliche Fragestellungen:
  - $n + 1$  statt  $3n + 1$ : Alle Orbits sind periodisch!
  - $2n + 1$  statt  $3n + 1$ : Es gibt (sogar unendlich viele) unbeschränkte Orbits!
  - $4n + 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - $3n - 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - ... ??? ...

- Die Collatz-Vermutung ist leicht zu formulieren, aber offenbar extrem schwierig zu beweisen oder zu widerlegen.
- Das gilt nicht für auf den ersten Blick sehr ähnliche Fragestellungen:
  - $n + 1$  statt  $3n + 1$ : Alle Orbits sind periodisch!
  - $2n + 1$  statt  $3n + 1$ : Es gibt (sogar unendlich viele) unbeschränkte Orbits!
  - $4n + 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - $3n - 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - ... ??? ...
- Für Neugierige: Was ändert sich, wenn man in der ursprünglichen Fragestellung *ganze Zahlen* (also auch negative) erlaubt?  
*Hinweis: Die Collatz-Vermutung gilt nicht – wer eine neue Periode findet, darf mir gern eine Email schreiben.*

- Die Collatz-Vermutung ist leicht zu formulieren, aber offenbar extrem schwierig zu beweisen oder zu widerlegen.
- Das gilt nicht für auf den ersten Blick sehr ähnliche Fragestellungen:
  - $n + 1$  statt  $3n + 1$ : Alle Orbits sind periodisch!
  - $2n + 1$  statt  $3n + 1$ : Es gibt (sogar unendlich viele) unbeschränkte Orbits!
  - $4n + 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - $3n - 1$  statt  $3n + 1$ : ???
  - ... ??? ...
- Für Neugierige: Was ändert sich, wenn man in der ursprünglichen Fragestellung *ganze Zahlen* (also auch negative) erlaubt?  
*Hinweis: Die Collatz-Vermutung gilt nicht – wer eine neue Periode findet, darf mir gern eine Email schreiben.*

**Vielen Dank für die Aufmerksamkeit  
und weiterhin viel Freude beim mathematischen Entdecken!**